



# Modélisation de la stabilité magnétohydrodynamique bidimensionnelle par une équation différentielle généralisée

M. Sermange

## ► To cite this version:

M. Sermange. Modélisation de la stabilité magnétohydrodynamique bidimensionnelle par une équation différentielle généralisée. RR-0092, INRIA. 1981. inria-00076469

**HAL Id: inria-00076469**

**<https://inria.hal.science/inria-00076469>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 92

**MODÉLISATION DE LA STABILITÉ  
MAGNETOHYDRODYNAMIQUE  
BIDIMENSIONNELLE  
PAR UNE ÉQUATION  
DIFFÉRENTIELLE GÉNÉRALISÉE**

**Michel SERMANGE**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

**Septembre 1981**

MODELISATION DE LA STABILITE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE  
BIDIMENSIONNELLE PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE GENERALISEE

Michel SERMANGE

RESUME

Partant du principe de l'énergie, nous montrons que la stabilité MHD bidimensionnelle d'un équilibre bidimensionnel quelconque est déterminée par la position par rapport à 1 de la première valeur propre d'une équation différentielle généralisée scalaire à spectre ponctuel.

ABSTRACT

Starting from the principle of energy, we show that the 2-dimensional MHD stability of any 2-dimensional equilibrium is determined by the position with respect to 1 of the first eigenvalue of a scalar generalized differential equation with point spectrum.

## 0. INTRODUCTION.

La stabilité d'un équilibre magnétohydrodynamique axisymétrique quelconque peut être déterminée par le principe de l'énergie (cf. I.B. BERNSTEIN et al. [3]) et ce principe peut être appliqué séparément pour chaque mode, c.-à-d., pour  $m$  fixé, pour des perturbations  $\xi$  du type

$$\xi(r, \theta, z) = \exp(im\theta) \cdot \{\xi_r(r, z)e_r + \xi_\theta(r, z)e_\theta + \xi_z(r, z)k\}.$$

Pour un mode  $m$  donné, le principe de l'énergie peut se formuler de deux façons équivalentes : un équilibre est stable si et seulement si le spectre d'un certain opérateur  $F_m$  est contenu dans la demi-droite  $\geq 0$  ou encore si et seulement si l'énergie potentielle  $\delta W_m = \frac{1}{2} \int F_m \xi \cdot \xi \, dx$  est positive ou nulle pour tout déplacement. Mais la mise en oeuvre de ces critères se heurte à une difficulté mathématique importante : l'existence d'un spectre continu (cf. H. GRAD [6], J. DESCLOUX- G. GEYMONAT [4]). D'un point de vue numérique, il existe plusieurs codes d'éléments finis qui peuvent déterminer la stabilité d'un équilibre axisymétrique général par rapport à un mode  $m$  quelconque (cf. [9] pour le code ERATO et [8] pour le code PEST). Dans ces codes, la difficulté due à la présence du spectre continu est résolue par l'emploi d'éléments finis de type mixte ou hybride.

Nous proposons ici, dans le cadre modèle de la dimension deux (c.-à-d.  $\frac{\partial B}{\partial x_3} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$ ,  $B_3 = 0$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0$ ,  $\xi_3 = 0$ ), une nouvelle méthode pour déterminer la stabilité d'un équilibre quelconque. Nous avons effectué une première minimisation de l'énergie potentielle  $\delta W$  de façon analytique et nous obtenons ainsi un nouveau problème spectral, à spectre ponctuel, dont la plus petite valeur propre détermine la stabilité de l'équilibre. Ce problème peut être discrétisé par la méthode des éléments finis standard.

Dans la partie I, nous énonçons notre nouveau critère de stabilité bidimensionnelle, d'abord sous la forme d'un problème variationnel, puis sous la forme d'une équation différentielle généralisée (faisant intervenir des intégrales sur les lignes  $\psi = \text{cte}$ ).

Dans la partie 2, nous définissons rigoureusement les espaces fonctionnels et nous étudions leurs propriétés mathématiques : complétude, interprétation des conditions aux limites, inclusions.

Dans la partie 3, nous étudions le problème d'optimisation suivant (intervenu dans la partie 1) : étant donnés un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et une fonction  $\psi$  sur  $\Omega$ , donner une expression explicite (en fonction de  $v$ ) de

$$\inf_{\substack{u \in (D'(\Omega))^2 \\ u \cdot \nabla \psi = v}} \int_{\Omega} p(\psi) |\operatorname{div} u|^2 dx.$$

Les outils mathématiques importants utilisés dans cet article sont le théorème intégral de Federer et la notion d'image directe d'une distribution ; ces résultats généraux sont présentés en annexe. Signalons par ailleurs que les équations différentielles généralisées intervenant ici constituent une version linéarisée d'équations introduites par H. GRAD pour étudier l'évolution adiabatique d'un plasma (cf. H. GRAD, P.N. HU, D.C. STEVENS [7], G. VIGFUSSON [18], J. MOSSINO, R. TEMAM [12]).

Le problème modèle étudié ici est une étape dans l'étude de la stabilité axisymétrique ( $m=0$ ) d'un équilibre axisymétrique quelconque (y compris les doublets). Signalons que la stabilité axisymétrique a été étudiée par E. REBHAN, A. SALAT pour des équilibres à pression uniforme [13].

L'auteur remercie H. GRAD, W. GROSSMANN et H. WEITZNER pour d'intéressantes discussions sur ce sujet durant une visite à l'Institut Courant.

# 1. - ORIGINE DU PROBLEME ET RESULTATS PRINCIPAUX.

## 1.1. Rappels de magnétohydrodynamique.

Nous rappelons dans cette section les problèmes d'équilibre et de stabilité en MHD (cf. C. MERCIER [10]).

Considérons un plasma à l'équilibre dans une région  $\Omega_0$  entourée par une coque parfaitement conductrice  $\Gamma_0$ . Le plasma occupe la région  $\Omega$ , de bord  $\Gamma$ , tandis que la région complémentaire  $\Omega^c$  est vide. L'équilibre est décrit par le champ magnétique  $B$  (défini sur  $\Omega_0$ ) et la pression  $p$  (définie sur  $\Omega$ ) qui vérifient :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{grad } p = \text{rot } B \times B & \text{dans } \Omega, \\ \text{rot } B = 0 & \text{dans } \Omega^c, \\ \text{div } B = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ B \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ B \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Nous supposons, pour simplifier, que les fonctions  $p$  et  $B$  et leurs dérivées n'ont pas de saut à travers  $\Gamma$  <sup>(1)</sup> :

$$(1.2) \quad \text{rot } B = 0, \text{ grad } p = 0, p=0 \text{ sur } \Gamma.$$

Par linéarisation du problème MHD évolutif, J.B. BERNSTEIN et al [3] ont obtenu les résultats suivants.

Etant donnée une fonction  $\xi$  définie sur  $\Omega$  et à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ , qui représente les déplacements lagrangiens du fluide, la variation première de l'énergie potentielle est donnée par  $\delta W$

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta W = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} F(\xi) \cdot \xi \, dx, \\ Q = \text{rot } (\xi \times B), \\ F(\xi) = \text{rot } B \times Q - B \times \text{rot } Q + \text{grad}(\gamma p \, \text{div } \xi + \xi \cdot \text{grad } p), \end{array} \right.$$

( $\gamma = 5/3$ , constante de chaleur spécifique).

---

(1) sinon, la condition sur  $\Gamma$  est  $\langle p + \frac{1}{2} B^2 \rangle = 0$ .

Comme le problème évolutif est à frontière libre, les déplacements  $\xi$  doivent vérifier une relation de compatibilité sur la frontière libre  $\Gamma$  ; c'est la condition (1.5) ci-dessous.

On peut déterminer un potentiel vecteur  $A$  sur  $\Omega^C$  par

$$(1.4) \quad \begin{cases} \text{rot} (\text{rot } A) = 0 \text{ sur } \Omega^C, \\ n \times A = - (n \cdot \xi) B \text{ sur } \Gamma, \\ n \times A = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Le déplacement  $\xi$  est admissible si et seulement si

$$(1.5) \quad B \cdot \text{rot}(\xi \times B) = B \cdot \text{rot } A \text{ sur } \Gamma.$$

Le critère de stabilité est le suivant : un équilibre est stable si et seulement si  $\delta W \geq 0$  pour tout déplacement  $\xi$  admissible.

Remarque 1.1 :

- i) puisque le vecteur  $A$  défini par (1.4) ne fait intervenir que la trace de  $\xi$  sur  $\Gamma$ , la relation de compatibilité (1.5) est une relation entre les traces sur  $\Gamma$  de  $\xi$  et de ses dérivées premières ;
- ii) après transformation de  $\delta W$  par intégrations par partie, le principe d'énergie peut être étendu à des déplacements  $\xi$  quelconques.

1.2. Magnétohydrodynamique bidimensionnelle.

Equations d'équilibre.

Nous nous intéressons ici à la stabilité d'un équilibre bidimensionnel (c.à d. vérifiant  $\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$ ,  $\frac{\partial B}{\partial x_3} = 0$ ,  $B_3 = 0$ ) par rapport à des perturbations bidimensionnelles (c.à d. vérifiant  $\frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0$ ,  $\xi_3 = 0$ ).

Nous désignons maintenant par  $\Omega_0$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega^C$ , les sections par un plan  $x_3 = \text{cte}$  des régions définies précédemment.

Il a été établi par H. GRAD, et V.D. SHAFRANOV (cf. G. BATEMAN [2], R. TEMAM [17]) qu'en dimension deux les équilibres ont les propriétés suivantes (des propriétés analogues ont lieu en axisymétrie) :

- i) il existe une fonction flux  $\psi$  définie sur  $\Omega_0$  telle que

$$B = e_3 \times \nabla \psi + f(\psi),$$

ce qui, avec  $B_3 = 0$ , donne

$$B = e_3 \times \nabla \psi ;$$

notations :

les lignes de niveau de  $\psi$  qui possèdent (au moins) un point double sont appelées les séparatrices; elles subdivisent l'ouvert  $\Omega$  en  $m$  composantes connexes  $\omega_i$ , sur lesquelles les lignes de niveau de  $\psi$  sont des courbes fermées simples, notées  $\Gamma_i(t)$  (cf. partie 2, P3)); l'ensemble des séparatrices est noté  $\Sigma$  ;

ii) la pression  $p$  est localement une fonction de  $\psi$  ; il existe donc des fonctions  $p_i$  telles que

$$p(x) = p_i(\psi(x)) \text{ pour } x \in \omega_i ;$$

iii) le flux  $\psi$  vérifie le système d'E.D.P. suivant

$$(1.6) \quad \begin{cases} -\Delta \psi = p'_i(\psi) \text{ sur } \omega_i, & 1 \leq i \leq m, \\ \Delta \psi = 0 \text{ sur } \Omega^c, \\ \psi = \text{cte sur les composantes connexes de } \Gamma, \\ \psi = \text{cte sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

#### Principe de l'énergie.

Ce rappel des équations d'équilibre étant fait, nous allons maintenant expliciter le principe d'énergie dans le cadre bidimensionnel.

Après quelques calculs algébriques, nous obtenons pour  $F(\xi)$  :

$$F(\xi) = (\Delta u_1 + p''_i(\psi)u_1) \text{ grad } \psi + \text{grad}(\gamma p \text{ div } \xi) \quad \text{sur } \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

où  $u_1 = \xi \cdot \nabla \psi$  ; d'où, d'après (1.3),

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta u_1 \cdot u_1 \, dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p''_i(\psi) u_1^2 \, dx - \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} \nabla(p \text{ div } \xi) \cdot \xi \, dx.$$

Utilisant la formule de Green et la condition  $p=0$  sur  $\Gamma$ , nous obtenons, en



notant  $n$  la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$  :

$$(1.7) \quad \delta W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n} \cdot u_1 d\sigma + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} p(\operatorname{div} \xi)^2 dx \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_i''(\psi) u_1^2 dx.$$

Pour expliciter la condition d'admissibilité (1.5), nous introduisons l'unique solution  $u_2$  du problème

$$(1.8) \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \text{ dans } \Omega^c, \\ u_2 = u_1 \text{ sur } \Gamma, \\ u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Nous vérifions que le champ défini par  $A = u_2 e_3$  vérifie (1.4) et que la condition (1.5) peut s'écrire

$$(e_3 \times \nabla \psi) \cdot (e_3 \times \nabla u_1 - e_3 \times \nabla u_2) = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

ou encore, en supposant que  $\nabla \psi(x) \neq 0$  p.p. sur  $\Gamma$ ,

$$(1.9) \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ sur } \Gamma, \text{ où } u_2 \text{ est défini par (1.8).}$$

Le principe de l'énergie en dimension deux est donc le suivant : un équilibre est 2d-stable si et seulement si  $\delta W$  défini par (1.7) est positif ou nul pour tout déplacement  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $u_1 = \xi \cdot \nabla \psi$  vérifie (1.9).

#### Extension du principe de l'énergie.

Puisque la normale  $n$  est dirigée vers l'intérieur de  $\Omega^c$ , la formule de Green et (1.8) donnent

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial n} u_2 d\sigma = - \int_{\Omega^c} |\nabla u_2|^2 dx.$$

D'après (1.8), (1.9), nous avons donc

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n} u_1 d\sigma = - \int_{\Omega^c} |\nabla u_2|^2 dx.$$

Notant  $u$  la fonction définie sur  $\Omega_0$  par  $u_1$  sur  $\Omega$  et  $u_2$  sur  $\Omega^c$ , nous déduisons de (1.7)

$$(1.10) \quad \delta W = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} p(\operatorname{div} \xi)^2 dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_i''(\psi) u^2 dx.$$

Utilisant un raisonnement analogue à celui de I.B. BERNSTEIN et al. dans [3] (c.à d. une modification de  $\xi$  au voisinage de  $\Gamma$ ), il est possible de montrer que si  $\delta W$  défini par (1.10) est strictement négatif pour un déplacement  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et une fonction  $u_2 : \Omega^c \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$(1.11) \quad u_2 = u_1 \text{ sur } \Gamma \text{ et } u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

alors il existe  $\tilde{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  vérifiant (1.9) tel que  $\delta W$  soit strictement négatif.

Ainsi, un équilibre est 2d-stable si et seulement si  $\delta W$  défini par (1.10) est positif ou nul pour tout  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et tout  $u_2 : \Omega^c \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (1.11).

### 1.3. Transformation du principe de l'énergie.

De l'égalité

$$\inf_{\xi, u_2 \text{ verif. (1.11)}} = \inf_{u \text{ t.q. } u=0 \text{ sur } \Gamma_0} \left\{ \inf_{\xi \text{ t.q. } \xi \cdot \nabla \psi = u|_{\Omega}} \right\},$$

nous déduisons le critère de stabilité :

$$0 \leq \inf_{u \text{ t.q. } u=0 \text{ sur } \Gamma_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \gamma J(u) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_i''(\psi) u^2 dx \right\},$$

où

$$J(u) = \inf_{\xi \text{ t.q. } \xi \cdot \nabla \psi = u|_{\Omega}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(\operatorname{div} \xi)^2 dx \right\}.$$

Or nous démontrerons (th. 3.1 et prop. 2.1) que pour une fonction  $u$  suffisamment régulière

i) si  $u(x) = 0$  pour tous les  $x \in \Omega$  tels que  $\nabla \psi(x) = 0$ , alors

$$(1.12) \quad J(u) \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} p_i \rho_i^{-1} \left[ \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right]^2 dt$$

où  $\rho_i(t) = \int_{\Gamma_i(t)} \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}$  et  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont les valeurs minimales et maximales de  $\psi$  sur  $\bar{\omega}_i$  ;

ii) s'il existe  $x \in \Omega$  tel que  $\nabla\psi(x) = 0$  et  $u(x) \neq 0$ , alors  $J(u) = +\infty$ .

De plus, si  $\psi$  n'a pas de point-selle dans  $\Omega$  ou si  $u$  est identiquement nul dans un voisinage des séparatrices, alors l'égalité a lieu dans (1.12).

Une condition suffisante de stabilité (nécessaire et suffisante si  $\psi$  n'a pas de point-selle dans  $\Omega$ ) est donc que

$$0 \leq \inf_{\substack{u \text{ t.q. } u=0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \text{et } u(x)=0 \text{ si } x \in \Omega \text{ et } \nabla\psi(x)=0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} p_i \rho_i^{-1} \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right)^2 dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_i''(\psi) u^2 dx \right\}.$$

Nous séparons maintenant les parties positives et négatives de  $p_i''$  :

$$p_{i+}''(z) = \max(p_i''(z), 0), \quad p_{i-}''(z) = \max(-p_i''(z), 0).$$

Le critère précédent peut ainsi s'écrire  $R(u) \geq 1$  avec

$$(1.13) \quad R(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} p_i \rho_i^{-1} \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_{i-}''(\psi) u^2 dx}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \int_{\omega_i} p_{i+}''(\psi) u^2 dx}$$

Nous reconnaissons là un quotient de Rayleigh, dont la valeur minimale est donnée par la première valeur propre du problème variationnel associé. Nous supposons maintenant que  $\psi$  est régulière et vérifie (2.1)-(2.5) et que  $p_i''$  est bornée, pour  $1 \leq i \leq m$ .

### Problème variationnel

Nous définissons l'espace fonctionnel

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega_0) \text{ t.q. } v|_{\Omega_i} \in H_p^2(\Omega_i, \psi) , 1 \leq i \leq q\}$$

où

$H_0^1(\Omega_0)$  est l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega_0$  avec trace nulle sur  $\Gamma_0$  (cf. R.A. ADAMS [1]) ;

$H_p^2(\Omega_i, \psi)$  est un espace défini dans la partie 2,  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , étant les composantes connexes de  $\Omega$ .

Muni du produit scalaire

$$((u,v)) = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \gamma \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} p_i \rho_i^{-1} \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla \psi|} \right) \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} v \frac{d\sigma}{|\nabla \psi|} \right) dt,$$

l'espace  $V$  est un espace de Hilbert (cf. th. 3.1).

Nous définissons le problème : trouver  $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times V$ ,  $u \neq 0$ , tel que, pour tout  $v \in V$ ,

$$(1.14) \quad ((u,v)) + \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_{i-}''(\psi) uv \, dx = \mu \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} p_{i+}''(\psi) uv \, dx.$$

Les valeurs propres de (1.15) sont réelles et positives ; grâce à la compacité de l'injection de  $V$  dans  $L^2(\Omega_0)$ , elles forment une suite qui tend vers  $+\infty$ . Il existe ainsi une plus petite valeur  $\mu_1 \geq 0$  ; elle est égale à la valeur minimale de  $R(u)$  (défini par (1.13)) sur  $V$ .

Ainsi  $\mu_1 \geq 1$  est une condition suffisante de stabilité (nécessaire et suffisante si  $\psi$  n'a pas de point-selle dans  $\Omega$ ).

### Une équation différentielle généralisée.

Soit  $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times V$  une solution régulière<sup>(1)</sup> de (1.14). L'emploi de la formule de Green sur  $\Omega$  donne pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega_0)$

$$\int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega_0} \Delta u \cdot v \, dx,$$

---

(1) La régularité des solutions de (1.14) n'est pas étudiée dans cet article.

et son emploi sur  $\mathbb{R}$  donne pour  $v \in \mathcal{B}(\omega_i)$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} p_i \rho_i^{-1} \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right) \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} v \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right) dt = \\ = - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{d}{dt} \left( p_i \rho_i^{-1} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right) \cdot \int_{\Gamma_i(t)} v \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} dt \end{aligned}$$

ce qui est égal, grâce au théorème intégral de Federer (cf. Cor. 4.1) à

$$- \int_{\omega_i} \frac{d}{dt} \left( p_i \rho_i^{-1} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right) \Big|_{t=\psi(x)} \cdot v(x) dx.$$

Puisque  $v$  est arbitraire, nous trouvons que  $u$  vérifie les équations différentielles généralisées (1.15) ci-dessous. Par ailleurs, la proposition 2.1 donne les conditions aux limites aux points critiques de  $\psi$  tandis que  $u \in H_0^1(\Omega_0)$  donne  $u$  nul sur  $\Gamma_0$ .

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u - \gamma \frac{d}{dt} \left[ p_i \rho_i^{-1} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_i(t)} u \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} \right] \Big|_{t=\psi(x)} + p_{i-}''(\psi) u = \mu p_{i+}''(\psi) u \\ \text{dans } \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ u(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega \text{ t.q. } \nabla\psi(x) = 0, \\ u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ continu à travers } \Sigma \text{ et } \Gamma, \\ \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega^c, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Les équations différentielles ci-dessus constituent une version linéarisée d'équations différentielles généralisées étudiées actuellement par divers auteurs (cf. [7][17][18]).

Remarque 1.1 : L'approximation numérique du problème (1.14) peut être faite par la méthode des éléments finis d'ordre 1, le calcul de la première valeur propre du problème approché pouvant être traité par la méthode des puissances

itérées. Remarquons que la partie non locale de (1.14) rend la matrice du système linéaire relativement pleine. Du fait d'une erreur dans les coefficients du problème variationnel, les résultats numériques présentés dans [16] ne sont pas significatifs, mais l'étude de faisabilité de la méthode (place mémoire et temps calcul) reste positive. De nouveaux résultats numériques seront publiés ultérieurement.

Remarque 1.2 : Dans le cas où  $\psi$  a des point-selle dans  $\Omega$ , il est possible d'obtenir des conditions nécessaires de stabilité. Nous introduisons  $V_\varepsilon$ , l'ensemble des fonctions de  $V$  qui sont nulles dans un voisinage tubulaire de rayon  $\varepsilon$  autour de  $\Sigma$ , et  $\mu_{1\varepsilon}$  la première valeur propre de (1.14) en remplaçant  $V$  par  $V_\varepsilon$ . Nous avons bien sûr  $\mu_1 \leq \mu_{1\varepsilon}$ . Si pour  $\varepsilon_0$  nous avons  $\mu_{1\varepsilon_0} < 1$ , alors l'équilibre est instable. La question de la convergence de  $\mu_{1\varepsilon}$  vers  $\mu_1$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  est actuellement ouverte.

## 2. - CONSTRUCTION ET ETUDE DES ESPACES FONCTIONNELS.

Dans les parties 2 et 3,  $\Omega$  désigne un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$ ,  $\Omega$  étant localement d'un seul côté de  $\Gamma$ .

Nous supposons donnée une fonction  $\psi$  sur  $\overline{\Omega}$ , de classe  $C^\infty$ , telle que

(2.1)  $\psi$  est constante sur les composantes connexes de  $\Gamma$ ,

(2.2)  $\psi$  n'a pas de point critique sur  $\Gamma$ ,

(2.3) les points critiques de  $\psi$  sont réguliers<sup>(1)</sup>.

D'après (2.1), (2.2),  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  est de signe constant sur  $\overline{\Gamma}$ , la frontière extérieure de  $\Omega$ . Quitte à changer  $\psi$  en  $-\psi$ , nous pouvons donc nous ramener à

(2.4)  $\frac{\partial \psi}{\partial n} < 0$  sur  $\overline{\Gamma}$ .

Nous appelons séparatrice une courbe de niveau de  $\psi$  qui possède (au moins) un point double. Nous ferons éventuellement l'hypothèse que

(2.5) les séparatrices n'ont qu'un seul point double.

Nous introduisons  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , les composantes connexes de  $\Omega \setminus \Sigma$  où  $\Sigma$  est l'union des séparatrices. Nous notons  $\omega_i$  l'ouvert dont  $\overline{\Gamma}$  est la frontière extérieure ; nous notons  $\psi_i$  la restriction de  $\psi$  à  $\omega_i$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  le minimum et le maximum de  $\psi_i$  sur  $\overline{\omega_i}$ .

La théorie de Morse d'une part et la théorie du degré topologique d'autre part (cf. J. MILNOR [11]) permettent de déduire de (2.1)-(2.4) les propriétés suivantes qui nous seront utiles pour la suite

P1) les points critiques de  $\psi$  sont en nombre fini ; ce sont des maxima relatifs ou des point -selle ;

P2) pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $\omega_i$  est soit simplement connexe, soit homéomorphe à un anneau ; dans le premier cas,  $\psi_i$  n'atteint la valeur  $\alpha_i$  que sur  $\partial \omega_i$  et la valeur  $\beta_i$  qu'en un point ; dans le second cas,  $\psi_i$  n'atteint la valeur  $\alpha_i$  que sur la frontière extérieure de  $\omega_i$  et  $\beta_i$  sur la fron-

---

(1) c.à d. la hessienne de  $\psi$  en  $x$  est non dégénérée.

tière intérieure de  $\omega_i$  ; en particulier,

$$\psi(x) > \alpha_i \quad \forall x \in \Omega ;$$

P3) pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$  et tout  $t$ ,  $\alpha_i < t < \beta_i$ , l'ensemble  $\psi_i^{-1}\{t\}$  est une courbe fermée simple.

Par ailleurs, grâce au théorème intégral de Federer (cf. Cor. 4.1), pour tout  $v \in L^1(\Omega)$  il est possible de définir une fonction  $\psi_{i\#}(v) \in L^1(\alpha_i, \beta_i[)$  par

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_{\psi_i^{-1}\{t\}} v \, d\mu \quad \text{où} \quad d\mu = \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}.$$

L'application  $\psi_{i\#}$  est continue de  $L^1(\Omega)$  dans  $L^1(\alpha_i, \beta_i[)$ . Nous noterons  $\rho_i = \psi_{i\#}(1)$ , c.à d.  $\rho_i(t) = \int_{\psi_i^{-1}\{t\}} d\mu$ . D'après le théorème intégral de Federer,  $\|\rho_i\|_{L^1} = \text{mes}(\omega_i)$ .

Supposons par ailleurs donnée une fonction mesurable  $a$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

(2.6)  $a$  est constante sur les composantes connexes des ensembles où  $\psi$  est constante ;

$$(2.7) \quad \frac{1}{a} \in L_{loc}^\infty(\Omega).$$

D'après P3), il existe des fonctions  $a_i$  de  $\alpha_i, \beta_i[$  dans  $\mathbb{R}_+$  telles que  $a(x) = a_i(\psi(x))$  pour  $x \in \omega_i$ . Puisque

$$a_i = \rho_i^{-1} \cdot \psi_{i\#}(a),$$

la fonction  $a_i$  est mesurable.

Nous pouvons maintenant définir un espace  $\tilde{H}$  qui dépendra de  $\Omega$ ,  $\psi$ ,  $a$  et d'un réel  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

$$\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi) = \left\{ v \in L^1(\Omega) \text{ tel que, pour } 1 \leq i \leq m, \right. \\ \left. (\psi_{i\#}(v))' \in L_{loc}^1(\alpha_i, \beta_i[) \text{ et } a_i^{1/p} \rho_i^{1-p} (\psi_{i\#}(v))' \in L^p(\alpha_i, \beta_i[) \right\}$$



où  $(\psi_{i\#}(v))'$  désigne la dérivée de  $\psi_{i\#}(v)$  au sens de  $\mathcal{D}'([\alpha_i, \beta_i[)$ .

Nous munissons cet espace de la norme

$$\|v\|_p = \|v\|_{L^1(\Omega)} + \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p} |(\psi_{i\#}(v))'|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Nous démontrerons le

Théorème 2.1 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.4) et (2.6)-(2.7), l'espace  $\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi)$  défini ci-dessus est un espace de Banach. De plus, l'application  $\psi_{1\#}$  est continue de  $\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi)$  dans  $C^0([\alpha_1, \beta_1])$  et les applications  $\psi_{i\#}$  ( $i \geq 2$ ) sont continues de  $\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi)$  dans  $C^0([\alpha_i, \beta_i])$ .

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses (2.1)-(2.7). Grâce au théorème précédent, il est possible de définir les conditions aux limites suivantes.

Soit  $x \in \Omega$  un point critique de  $\psi$  et  $t = \psi(x)$  ;

i) si  $x$  est un point d'extremum relatif, nous imposons

$$(2.8) \quad \psi_{i\#}(v)(t) = 0, \text{ où } i \text{ est défini par } x \in \omega_i$$

ii) si  $x$  est un point-selle, nous imposons

$$(2.9) \quad \psi_{i_1\#}(v)(t) = \psi_{i_2\#}(v)(t) + \psi_{i_3\#}(v)(t) \text{ où}$$

$i_1$  est défini par  $x \in$  frontière intérieure de  $\omega_1$ ,

$i_2, i_3$  sont définis par  $x \in$  frontière extérieure de  $\omega_1$ .

Nous définissons le sous espace de  $\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi)$  :

$$H_a^p(\Omega, \psi) = \{v \in \tilde{H}_a^p(\Omega, \psi), v \text{ vérifiant les conditions aux limites ci-dessus}\},$$

qui est muni de la norme induite.

D'après le théorème 2.1,  $H_a^p(\Omega, \psi)$  est un sous-espace fermé d'un espace de Banach ; c'est donc un espace de Banach.

Démonstration du théorème 2.1 : Vérifions tout d'abord que l'espace  $\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi)$  est complet. Soit  $\{v_n\}$  une suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_p$ . Puisque  $L^1(\Omega)$  et  $L^p([\alpha_i, \beta_i])$  sont des espaces complets, nous obtenons l'existence

de  $v \in L^1(\Omega)$  et  $f_i \in L^P([\alpha_i, \beta_i[)$  tels que

$$(2.10) \quad v_n \rightarrow v \text{ dans } L^1(\Omega),$$

$$(2.11) \quad a_i^{1/p} \cdot \rho_i^{\frac{1-p}{p}} (\psi_{i\#}(v_n))' \rightarrow f_i \text{ dans } L^P([\alpha_i, \beta_i[).$$

Soit  $q$  le nombre réel conjugué de  $p$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). De l'identité  $q \cdot \frac{p-1}{p} = 1$  et de  $\rho_i \in L^1([\alpha_i, \beta_i[)$ , nous déduisons

$$\rho_i^{\frac{p-1}{p}} \in L^q([\alpha_i, \beta_i[).$$

Multipliant (2.11) par  $\rho_i^{\frac{p-1}{p}}$  et utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$(2.12) \quad a_i^{1/p} (\psi_{i\#}(v_n))' \rightarrow \rho_i^{\frac{p-1}{p}} f_i \text{ dans } L^1([\alpha_i, \beta_i[).$$

Par ailleurs, d'après (2.4) et P2), l'application  $\psi$  est propre de  $\Omega$  dans  $[\alpha_1, +\infty[$  (c.à d. l'image réciproque de tout compact est un compact). En conséquence,  $\frac{1}{a} \in L_{loc}^\infty(\Omega)$  entraîne

$$(2.13) \quad \frac{1}{a_1} \in L_{loc}^\infty([\alpha_1, \beta_1]) \text{ et } \frac{1}{a_i} \in L^\infty([\alpha_i, \beta_i[) \text{ pour } i \geq 2.$$

Multipliant (2.12) par  $a_i^{-1/p}$ , nous obtenons

$$(2.14) \quad (\psi_{i\#}(v_n))' \rightarrow a_i^{-1/p} \rho_i^{\frac{p-1}{p}} f_i \text{ dans } L_{loc}^1([\alpha_i, \beta_i[).$$

Par ailleurs, (2.10) et la continuité de  $\psi_{i\#}$  entraîne que

$$\psi_{i\#}(v_n) \rightarrow \psi_{i\#}(v) \text{ dans } L^1([\alpha_i, \beta_i[),$$

ce qui entraîne que

$$(\psi_{i\#}(v_n))' \rightarrow (\psi_{i\#}(v))' \text{ dans } \mathcal{D}'([\alpha_i, \beta_i[).$$

Comparant avec (2.14), nous obtenons  $(\psi_{i\#}(v))' \in L_{loc}^1([\alpha_i, \beta_i[)$  et

$$a_i^{-1/p} \cdot \rho_i^{\frac{p-1}{p}} \cdot f_i = (\psi_{i\#}(v))' \quad p.p. \quad t \in ]\alpha_i, \beta_i[.$$

Multipliant la fonction  $(\psi_{i\#}(v))'$  par la fonction  $a_i^{1/p} \rho_i^{\frac{1-p}{p}}$ , nous obtenons

$$f_i = a_i^{1/p} \rho_i^{\frac{1-p}{p}} (\psi_{i\#}(v))' \in L^p([\alpha_i, \beta_i]),$$

ce qui, avec (2.11), montre que  $v_n \rightarrow v$  dans  $\tilde{H}_a^p(\Omega, \psi)$ .

Etudions maintenant la continuité des applications  $\psi_{i\#}$ . Utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder pour

$$a_i^{1/p} (\psi_{i\#}(v))' = \rho_i^{\frac{p-1}{p}} \cdot a_i^{1/p} \rho_i^{\frac{1-p}{p}} (\psi_{i\#}(v))',$$

nous obtenons

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i^{1/p} |\psi_{i\#}(v)'| dt \leq \left( \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \rho_i dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left( \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p} |\psi_{i\#}(v)'|^p dt \right)^{1/p},$$

d'où

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i^{1/p} |\psi_{i\#}(v)'| dt \leq \text{mes}(\omega_i)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|v\|_p.$$

Grâce à (2.13), nous obtenons pour  $i \geq 2$  l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\psi_{i\#}(v)'| dt \leq C \|v\|_p \quad \forall v \in H_a^p(\Omega, \psi),$$

et pour  $i=1$  nous obtenons pour tout  $\alpha > \alpha_1$  l'existence d'une constante  $C_\alpha$  telle que

$$\int_{\alpha}^{\beta_1} |\psi_{1\#}(v)'| dt \leq C_\alpha \|v\|_p \quad \forall v \in H_a^p(\Omega, \psi).$$

Le théorème découle de l'injection continue de  $W_{loc}^{1,1}([\alpha, \beta])$  dans  $C^0([\alpha, \beta])$  et de  $W^{1,1}([\alpha, \beta[)$  dans  $C^0([\alpha, \beta])$ . ■

Fonctions régulières de  $H_a^p(\Omega, \psi)$ .

Nous donnons une condition nécessaire pour qu'une fonction régulière appartienne à l'espace  $H_a^p(\Omega, \psi)$ , qui peut servir à interpréter les conditions aux limites aux points critiques de  $\psi$ .

Proposition 2.1 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.7), toute fonction  $v \in H_a^p(\Omega, \psi) \cap C^0(\Omega)$  vérifie

$$(2.15) \quad v(x) = 0 \text{ pour tout point d'extremum relatif de } \psi$$

et toute fonction  $v \in H_a^p(\Omega, \psi) \cap C^\eta(\Omega)$  (pour  $\eta > 0$ ) vérifie

$$(2.16) \quad v(x) = 0 \text{ pour tout point critique de } \psi.$$

Démonstration :

i) Soit  $x_0$  un point d'extremum relatif de  $\psi$ . D'après le lemme de Morse, il existe un difféomorphisme  $\xi$  de classe  $C^\infty$  de la boule unité  $B_1$  de  $\mathbb{R}^2$  dans un voisinage de  $x_0$  tel que

$$\tilde{\psi}(y) = \psi(\xi(y)) = \psi(x_0) - \frac{1}{2} \{y_1^2 + y_2^2\} \quad \forall y \in B_1$$

(d'après (2.4) les extrema relatifs sont des maxima relatifs).

Grâce à la proposition 4.4 et à  $|\nabla \tilde{\psi}| = r$ , nous obtenons

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_{\psi_i^{-1}\{t\}} v \frac{d\sigma}{|\nabla \psi|} = \int_{\tilde{\psi}_i^{-1}\{t\}} v(\xi(y)) |J_\xi(y)| \frac{d\sigma}{r}.$$

Puisque  $\tilde{\psi}_i^{-1}\{t\}$  est un cercle, nous pouvons passer en coordonnées polaires et nous obtenons

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_0^{2\pi} v(\xi(r, \theta)) |J_\xi(r, \theta)| d\theta \text{ où } r = 2 \sqrt{\psi(x_0) - t}.$$

Faisant tendre  $t$  vers  $\psi(x_0)$ , (2.8) entraîne (2.15).

ii) Soit  $x_0$  un point-selle de  $\psi$ . D'après le lemme de Morse, il existe un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  du carré unité  $C_1$  dans un voisinage  $V(x_0)$  tel que (on a posé  $\psi(x_0) = 0$ )

$$\tilde{\psi}(y) = \psi(\xi(y)) = \frac{1}{2} (y_1^2 - y_2^2) \quad \forall y \in C_1.$$

D'après la proposition 4.4, nous avons

$$\psi_{i\#}(v)(t) = \int_{\psi_i^{-1}\{t\} \setminus V(x_0)} v \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|} + \int_{\tilde{\psi}_i^{-1}\{t\}} v(\xi(y)) |J_{\xi}(y)| \frac{d\sigma}{|\nabla\psi|}.$$

D'après l'hypothèse (2.5), la séparatrice passant par  $x_0$  n'a pas d'autre point double que  $x_0$ ; la première intégrale a donc une limite finie lorsque  $t$  tend vers  $\psi(x_0)$ . Le deuxième terme peut s'écrire sous la forme

$$(2.17) \quad v(x_0) \int_{\tilde{\psi}^{-1}\{t\}} |J_{\xi}(y)| \frac{d\sigma}{|\tilde{\nabla}\psi|} + \int_{\tilde{\psi}^{-1}\{t\}} (v(\xi(y)) - v(x_0)) |J_{\xi}(y)| \frac{d\sigma}{|\tilde{\nabla}\psi|}.$$

Les courbes  $\tilde{\psi}^{-1}\{t\}$  sont des branches d'hyperbole équilatère, qui peuvent être paramétrées par

$$y_1 = \sqrt{2t} \operatorname{ch} z, \quad y_2 = \sqrt{2t} \operatorname{sh} z \quad \text{où } |z| \leq \operatorname{Argch} \left( \frac{1}{\sqrt{2t}} \right).$$

Or il est possible de démontrer qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $\eta > 0$  et pour tout  $t$  tel que  $0 < t < 1$ :

$$(2.18) \quad (2t)^{\eta/2} \int_{-\operatorname{Argch}(\frac{1}{\sqrt{2t}})}^{+\operatorname{Argch}(\frac{1}{\sqrt{2t}})} (\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z)^{\eta/2} dz \leq C,$$

et que, pour  $\eta=0$ , l'intégrale ci-dessus tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers 0. Nous en déduisons que si  $v(x_0) > 0$ , la première intégrale de (2.17) tend vers  $+\infty$  et que la seconde est bornée; en conséquence,  $\psi_{i\#}(v)(t) \rightarrow +\infty$  pour  $t \rightarrow \psi(x_0)$ , ce qui contredit  $\psi_{i\#}(v) \in C^0([\alpha_i, \beta_i])$ . Nous avons donc (2.16). ■

Un résultat d'inclusion.

Proposition 2.2 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.4) et (2.6)-(2.7), ainsi que l'hypothèse  $a \in L^1(\Omega)$ , l'injection de  $H_a^{p_2}(\Omega, \psi)$  dans  $H_a^{p_1}(\Omega, \psi)$  est continue pour tout  $p_1 \leq p_2$ .

Démonstration :

Nous appliquons l'inégalité de Hölder à

$$a_i \rho_i^{1-p_1} |(\psi_{i\#}(v))'|^{p_1} = \{a_i \rho_i\}^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} \cdot \{a_i \rho_i^{1-p_2} |\psi_{i\#}(v)'|^{p_2}\}^{p_1/p_2}$$

avec  $p = \frac{p_2}{p_2-p_1}$ ,  $q = \frac{p_2}{p_1}$  (où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Nous obtenons

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p_1} |\psi_{i\#}(v)'|^{p_1} dt \leq \left( \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i dt \right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} \cdot \left( \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p_2} |\psi_{i\#}(v)'|^{p_2} dt \right)^{p_1/p_2}.$$

Or, d'après le théorème intégral de Federer

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i dt = \int_{\omega_i} a dx.$$

Faisant la somme en  $i$  et utilisant  $\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{1/p} \cdot (\sum b_i^q)^{1/q}$ , nous obtenons

$$\left( \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p_1} |\psi_{i\#}(v)'|^{p_1} dt \right)^{1/p_1} \leq \left( \int_{\Omega} a dx \right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p_2} |\psi_{i\#}(v)'|^{p_2} dt \right)^{1/p_2}.$$

d'où

$$\|v\|_{p_1} \leq \left\{ 1 + \left| a \right|_{L^1}^{\frac{p_1 p_2}{p_2-p_1}} \right\} \|v\|_{p_2} \quad \forall v \in H_a^{p_2}(\Omega, \psi). \quad \blacksquare$$

### 3. - RESOLUTION D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION.

#### 3.1. Enoncé du résultat principal.

Le cadre étant le même que dans la partie 2, nous introduisons l'espace

$$E_a^p(\Omega, \psi) = \{ u \in (D'(\Omega))^2 \text{ t.q. } u \cdot \nabla \psi \in L^1(\Omega), \\ \operatorname{div} u \in L_{loc}^1(\Omega) \text{ et } a^{1/p} \operatorname{div} u \in L^p(\Omega) \} .$$

Le problème d'optimisation est le suivant : étant donné  $v \in L^1(\Omega)$ , calculer la valeur de

$$J(v) = \inf_{\substack{u \in E_a^p(\Omega, \psi) \\ u \cdot \nabla \psi = v}} \int_{\Omega} a |\operatorname{div} u|^p dx.$$

Le résultat est le suivant :

Théorème 3.1 : Sous les hypothèses (2.1)-(2.7), pour  $v \in L^{2+\varepsilon}(\Omega)$  avec  $\varepsilon > 0$ ,

i) si  $v \notin H_a^p(\Omega, \psi)$ ,  $J(v) = +\infty$

ii) si  $v \in H_a^p(\Omega, \psi)$ ,

$$(3.1) \quad J(v) \geq \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p} |(\psi_{i\#}(v))'|^p dt$$

avec égalité si  $\psi$  n'a pas de point-selle dans  $\Omega$  ou si  $v$  est identiquement nul dans un voisinage des séparatrices.

Remarque 3.1 :- La question de l'égalité dans (3.1) dans le cas général est un problème ouvert.

- Dans le §1.3, les conditions d'application du th. 3.1 sont remplies, car  $u|_{\Omega_i} = \xi \cdot \nabla \psi|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$  qui est inclus dans  $L^{2+\varepsilon}(\Omega_i)$  par l'injection de Sobolev en dimension deux.

#### 3.2. Partie I de la démonstration.

Nous allons démontrer, en utilisant des résultats de la partie 4, que pour toute distribution  $u \in E_a^p(\Omega, \psi)$ , la fonction  $v = u \cdot \nabla \psi$  vérifie les conditions aux limites (2.8)(2.9) et la relation

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p} |(\psi_{i\#}(v))'|^p dt \leq \int_{\Omega} a |\operatorname{div} u|^p dx.$$

Les résultats i) et ii) en découlent, excepté l'égalité dans (3.1) dont la démonstration fera l'objet du §3.3.

Considérons une distribution  $u \in E_a^p(\Omega, \psi)$ . Grâce à (2.7), nous avons

$$(3.3) \quad \operatorname{div} u \in L_{loc}^p(\Omega).$$

Nous allons étudier séparément le cas des ouverts  $\omega_i$  simplement connexes et le cas des ouverts  $\omega_i$  homéomorphes à un anneau.

i)  $\omega_i$  est simplement connexe. Grâce à la propriété P2), l'application  $\psi_i$  est propre de  $\omega_i$  dans  $] \alpha_i, +\infty[$ . Nous pouvons donc (cf. partie 4) définir une application  $\psi_{i\#}$  de  $\mathcal{D}'(\omega_i)$  dans  $\mathcal{D}'(] \alpha_i, +\infty[)$  par

$$\langle \psi_{i\#}(T), \phi \rangle = \langle T, \phi(\psi_i) \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(] \alpha_i, +\infty[).$$

D'après la proposition 4.1, cette application coïncide sur  $L^1(\omega_i)$  avec l'application  $\psi_{i\#}$  définie dans la partie 2.

D'après la proposition 4.3, nous avons

$$(3.4) \quad (\psi_{i\#}(v))' = \psi_{i\#}(\operatorname{div} u)$$

où la dérivée est prise au sens de  $\mathcal{D}'(] \alpha_i, +\infty[)$ . Puisque (3.3) entraîne que  $\psi_{i\#}(\operatorname{div} u) \in L_{loc}^1(] \alpha_i, +\infty[)$ , nous déduisons de (3.4) que  $\psi_{i\#}(v) \in C^0(] \alpha_i, +\infty[)$ . Revenant à la définition intégrale de  $\psi_{i\#}$ , nous en déduisons que

$$\psi_{i\#}(v)(\beta_i) = 0.$$

D'autre part, d'après (3.4) et (4.8) (cf. Proposition 4.2),

$$(3.5) \quad \rho_i^{1-p} |(\psi_{i\#}(v))'|^p(t) \leq \psi_{i\#}(|\operatorname{div} u|^p)(t), \quad \alpha_i < t < \beta_i.$$

Multipliant (3.5) par  $a_i(t)$ , intégrant en  $t$  et utilisant le théorème intégral



de Federer pour transformer le terme de droite, nous obtenons

$$(3.6) \quad \int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p} \cdot |(\psi_{i\#}(v))'|^p dt \leq \int_{\omega_i} a |\operatorname{div} u|^p dx.$$

ii)  $\omega_i$  homéomorphe à un anneau. Considérons tout d'abord un point-selle de  $\psi$   $x \in \Omega$  et démontrons que  $v$  vérifie (2.9). Pour cela, nous introduisons l'ouvert  $\omega' = \{x' \in \Omega \text{ t.q. } |\psi(x') - \psi(x)| < \varepsilon\}$  et  $\omega$  la composante connexe de  $\omega'$  contenant  $x$  (cf. fig. 3.1),  $\varepsilon$  étant un nombre réel positif choisi assez petit pour que  $\bar{\omega}$  soit inclus dans  $\Omega$  et ne contienne pas d'autre point critique de  $\psi$  que  $x$ .

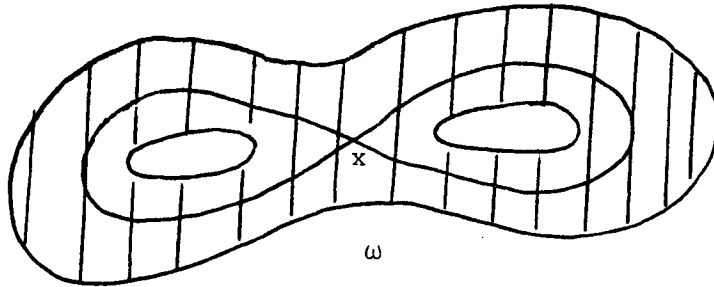


Figure 3.1

L'application  $\psi$  est propre de  $\omega$  dans  $]\psi(x) - \varepsilon, \psi(x) + \varepsilon[$ . Nous pouvons donc définir l'application  $\psi_{\#}$  de  $\mathcal{D}'(\omega)$  dans  $\mathcal{D}'(]\psi(x) - \varepsilon, \psi(x) + \varepsilon[)$  et utiliser les mêmes raisonnements que précédemment. Nous obtenons ainsi que  $\psi_{\#}(v) \in C^0(]\psi(x) - \varepsilon, \psi(x) + \varepsilon[)$ . Revenant à la définition intégrale de  $\psi_{\#}$ , nous en déduisons (2.9).

Considérons enfin l'application  $\psi_i$  de  $\omega_i$  dans  $]\alpha_i, \beta_i[$ , où  $\omega_i$  est homéomorphe à un anneau. D'après P2), cette application est propre. Nous définissons  $\psi_{i\#}$  de  $\mathcal{D}'(\omega_i)$  dans  $\mathcal{D}'(]\alpha_i, \beta_i[)$  et les mêmes raisonnements que précédemment donnent la relation (3.6).

Nous obtenons (3.2) en faisant la somme en  $i$ . ■

### 3.3. Partie II de la démonstration.

Etant donnée une fonction  $v \in H_a^p(\Omega, \psi)$  nulle dans un voisinage des séparatrices de  $\psi$ , nous allons construire par dualité une distribution  $u \in E_a^p(\Omega, \psi)$

telle que  $u \cdot \nabla \psi = v$  et telle que l'égalité ait lieu dans (3.2).

Primitives curvilignes de fonctions régulières.

Nous plongeons  $\mathbb{R}^2$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  et nous choisissons un vecteur unitaire  $k$  orthogonal à  $\mathbb{R}^2$ .

Pour chaque ouvert  $\omega_i, 1 \leq i \leq m$ , nous introduisons une courbe  $\mathcal{C}_i$ , de classe  $C^2$ , rencontrant une fois et une fois seulement chaque courbe  $\Gamma_i(t)$  pour  $\alpha_i < t < \beta_i$  (sous les hypothèses (2.1)-(2.4), une telle courbe existe ; prendre par exemple une courbe orthogonale à la famille de courbes  $\Gamma_i(t)$ ).

Ainsi, pour  $x \in \omega_i$ ,  $x$  n'étant pas un point critique, il existe un unique point  $x' \in \mathcal{C}_i$  tel que

$$(3.7) \quad x' \in \mathcal{C}_i \cap \Gamma_i(\psi(x)).$$

Les deux points  $x$  et  $x'$  séparent la courbe  $\Gamma_i(\psi(x))$  en deux composantes connexes. Nous noterons  $\delta(x)$  celle qui, au voisinage de  $x'$ , est située du côté où pointe  $-k \times \nabla \psi(x')$  (cf. Fig. 3.2).

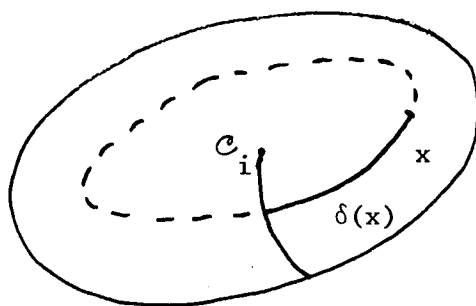


Figure 3.2

Nous introduisons enfin une fonction  $\eta \in \mathcal{D}(\bar{\Omega} \setminus \Sigma)$  qui est constante sur les ensembles  $\Gamma_i(t)$  et qui vaut identiquement 1 sur le support de  $v$ .

Nous pouvons maintenant définir, pour  $\phi \in C^0(\Omega)$ ,

$$A\phi(x) = \int_{\delta(x)} \left[ \eta(x')\phi(x') - \rho_i(\psi(x))^{-1} \cdot \int_{\Gamma_i(\psi(x))} \eta(x'')\phi(x'') \frac{d\sigma''}{|\nabla \psi|} \right] \frac{d\sigma'}{|\nabla \psi|},$$

où  $i$  est tel que  $x \in \omega_i$ .

Lemme 3.1 - Sous les hypothèses (2.1)-(2.4) et avec les notations précédentes,

- i) l'opérateur A est continu de  $C^0(\Omega)$  dans lui-même et de  $C^1(\Omega)$  dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$ ;
- ii) pour tout  $\phi \in C^1(\Omega)$ ,

$$(3.8) \quad A(-k \times \nabla \psi \cdot \nabla \phi)(x) = \phi(x) - \phi_i(\psi(x)) \quad \forall x \in \omega_i \cap \text{Supp } \eta$$

où  $\phi_i(t) = \phi(\mathcal{C}_i \cap \Gamma_i(t))$ .

Démonstration :

- i) La régularité de  $A\phi$  au voisinage d'un point  $x \in \Omega$  qui n'est pas critique et qui n'appartient pas aux séparatrices résulte de la régularité de  $\psi$ . Par ailleurs, grâce à la fonction  $\eta$ , la fonction  $A\phi$  est nulle dans un voisinage des séparatrices. Soit enfin un point  $x$  d'extremum relatif. Grâce au lemme de Morse, il est possible de se ramener au cas d'équipotentiels circulaires, et donc de passer en coordonnées polaires :

$$A\phi(\xi(x)) = \int_{\theta_i(r)}^{\theta} \left[ u - \left( \int_0^{2\pi} b \, d\theta'' \right)^{-1} \int_0^{2\pi} b u \, d\theta'' \right] b \, d\theta'$$

où  $b(x) = |J_{\xi}(x)|$ ,  $u(x) = \phi(\xi(x))$  et  $\theta_i$  est l'équation de la courbe  $\mathcal{C}_i$ . Grâce à des développements de Taylor d'ordre 1, il est alors possible de montrer que

$$\lim_{x' \rightarrow x} A\phi(x') = 0$$

et

$$|\nabla A\phi(x')| \leq C |\nabla \phi(x)| \quad \text{dans un voisinage de } x,$$

ce qui démontre i).

- ii) Posant  $\tau = -k \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$ , nous avons  $-k \times \nabla \psi \cdot \nabla \phi = |\nabla \psi| \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ ; comme par ailleurs  $\eta=1$  sur  $\Gamma_i(\psi(x))$  pour  $x \in \text{Supp } v$ , le deuxième terme de  $A\phi(x)$  vaut

$$\int_{\Gamma_i(\psi(x))} |\nabla \psi| \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{d\sigma}{|\nabla \psi|} = 0,$$

et donc

$$A\phi(x) = \int_{\delta(x)} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\sigma = \phi(x) - \phi(x')$$

où  $x'$  est défini par (3.7), ce qui donne (3.8). ■

# Définition de la distribution $u$ .

Nous définissons la fonction

$$g(x) = \rho_i^{-1} (\psi_{i\#}(v))' \Big|_{t=\psi(x)} \quad \text{où } i \text{ est défini par } x \in \omega_i.$$

La proposition 2.2 appliquée avec  $a_0 \equiv 1$  sur  $\Omega$  donne

$$H_{a_0}^p(\Omega, \psi) \subset H_{a_0}^1(\Omega, \psi).$$

Par ailleurs, pour tout ouvert  $\Omega'$  tel que  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ , nous avons

$$H_a^p(\Omega, \psi) \subset H_a^p(\Omega', \psi).$$

Nous en déduisons que  $v \in H_a^1(\Omega', \psi)$ . D'autre part, le théorème intégral de Federer donne pour  $i \geq 2$  (pour  $i=1$ , raisonner sur  $\Omega'$ )

$$\int_{\omega_i} |g| dx = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\psi_{i\#}(v)'| dt$$

Nous obtenons finalement que  $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

Considérons maintenant la fonction  $v \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2}$ . Au voisinage d'un point-selle, cette fonction est nulle. Au voisinage d'un point d'extremum local, le passage aux coordonnées polaires montre que  $\frac{1}{|\nabla \psi|} \in L^{2-\epsilon}$  ( $\epsilon > 0$ ). Puisque  $v \in L^{2+\epsilon}(\Omega)$ , nous obtenons finalement que  $v \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \in L^1(\Omega)$ .

Grâce au lemme 3.1, il est alors possible de définir  $T \in (\mathcal{D}'(\Omega))^2$  par

$$\langle T, \phi \rangle = - \int_{\Omega} g \cdot A(-k \times \nabla \psi \cdot \phi) dx - \int_{\Omega} v \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \cdot \nabla (A(-k \times \nabla \psi \cdot \phi)) dx$$

$$\forall \phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^2;$$

nous définissons alors  $u \in (\mathcal{D}'(\Omega))^2$  par

$$u = T + v \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2}.$$

D'après la définition de  $T$ , nous avons  $T \cdot \nabla \psi = 0$ , d'où  $u \cdot \nabla \psi = v$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\operatorname{div} u = g$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\langle \operatorname{div} u, \phi \rangle = -\langle u, \nabla \phi \rangle$  vaut, grâce à (3.8),

$$(3.9) \quad \int_{\Omega} g \phi \, dx = \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} g \phi_i(\psi) \, dx = \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} \frac{v}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi \cdot \nabla \phi_i(\psi) \, dx.$$

Le dernier terme vaut

$$(3.10) \quad - \sum_{i=1}^m \int_{\omega_i} v \phi_i' \, dx.$$

D'après le théorème intégral de Federer, l'avant dernier terme de (3.9) vaut

$$(3.11) \quad - \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \psi_{i\#}(v)' \phi_i \, dt.$$

Puisque  $v \in H_a^p(\Omega, \psi)$  et est nul dans un voisinage des séparatrices, nous avons  $\psi_{i\#}(v)(\alpha_i) = 0$  pour  $2 \leq i \leq m$  et  $\psi_{i\#}(v)(\beta_i) = 0$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Par ailleurs, puisque  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nous avons  $\phi_1(\alpha_1) = 0$ . La formule de Green appliquée à (3.11) donne donc

$$\sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \psi_{i\#}(v) \phi_i' \, dt,$$

ce qui, compte tenu du théorème intégral de Federer, vaut l'opposé de (3.10). Ainsi l'expression de (3.9) vaut  $\int_{\Omega} g \phi \, dx$ , d'où  $\operatorname{div} u = g$ .

Nous pouvons donc écrire

$$a_i \rho_i^{1-p} |(\psi_{i\#}(v))'|^p = a_i \rho_i |\operatorname{div} u|^p,$$

d'où, puisque  $\operatorname{div} u = g$  est constant sur  $\Gamma_i(t)$ ,

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} a_i \rho_i^{1-p} |(\psi_{i\#}(v))'|^p \, dt = \int_{\omega_i} a |\operatorname{div} u|^p \, dx,$$

ce qui entraîne l'égalité dans (3.2). ■

4. - ANNEXE : IMAGE DIRECTE D'UNE DISTRIBUTION.

Le théorème intégral de Federer (cf. [5] th. 3.2.12) est utilisé ici sous la forme du

Corollaire 4.1 : Si  $f$  est lipschitzienne de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $m > n$ , pour toute fonction  $g$   $\mathcal{L}^m$ -mesurable à valeur dans  $\overline{\mathbb{R}}$  nous avons

i) si  $g \geq 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}^m$ ,

$$(4.1) \quad \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_n f(x) d\mathcal{L}^m x = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mathcal{H}^{m-n} x d\mathcal{L}^n y ;$$

ii)  $g$  est  $J_n f(x) d\mathcal{L}^m x$  intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}\{y\}} |g(x)| d\mathcal{H}^{m-n} x d\mathcal{L}^n y < \infty ;$$

iii) si  $g$  est  $J_n f(x) d\mathcal{L}^m x$  intégrable, (4.1) a lieu.

Commentaire. - Dans le théorème précédent,  $\mathcal{L}^m$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{H}^k$  la mesure de Hausdorff d'ordre  $k$  (cf. C.A. ROGERS [14]),  $J_k f(a)$  le jacobien d'ordre  $k$  de  $f$ , c.à d. la norme du produit extérieur  $\wedge_k Df(a)$  ; en particulier,  $J_1 f(a) = \|Df(a)\|$  ; cette expression a un sens car, d'après le théorème de Rademacher (cf. H. FEDERER [5]), une application lipschitzienne de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  est différentiable  $\mathcal{L}^m$ -presque partout.

Soit maintenant  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ),  $\omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\omega$  vérifiant :

(4.2)  $f$  est de classe  $C^\infty$  et propre<sup>(1)</sup> de  $\Omega$  dans  $\omega$  ;

(4.3)  $f$  admet un prolongement lipschitzien à  $\mathbb{R}^n$  ;

(4.4)  $\nabla f(x) \neq 0$  p.p.  $x \in \Omega$ .

Sous la condition (4.2), nous savons définir (cf. L. SCHWARTZ [15]) l'image directe de  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  par  $f$  :

$$(4.5) \quad \langle f_{\#} T, \phi \rangle = \langle T, \phi(f) \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega).$$

---

<sup>(1)</sup> c.à d. l'image réciproque de tout compact est un compact.

Nous savons que l'application  $f_{\#}$  est linéaire continue de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'(\omega)$ .

Grâce au théorème intégral de Federer, nous avons la

Proposition 4.1 : Sous les conditions (4.2)-(4.4), l'application  $f_{\#}$  définie par (4.5) a les propriétés suivantes

- i)  $f_{\#}(L^1_{\text{loc}}(\Omega)) \subset L^1_{\text{loc}}(\omega)$  et  $f_{\#}(L^1(\Omega)) \subset L^1(\omega)$ ,
- ii)  $f_{\#}$  est continue de  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  (resp.  $L^1(\Omega)$ ) dans  $L^1_{\text{loc}}(\omega)$  (resp.  $L^1(\omega)$ ),
- iii) pour toute fonction  $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , notant  $d\mu(x) = |\nabla f(x)|^{-1} d\mathbb{H}^{n-1}x$ ,

$$(4.6) \quad f_{\#}(g)(y) = \int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mu(x) \quad \text{p.p. } y \in \Omega.$$

Démonstration : Soit  $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  et  $K$  un compact quelconque de  $\omega$ . Soit  $h$  la fonction définie par

$$h(y) = \int_{f^{-1}\{y\}} g d\mu(x).$$

D'après le théorème intégral de Federer,  $h$  est intégrable sur  $K$  si et seulement si  $g \cdot |\nabla f|^{-1}$  est  $|\nabla f| dx$  intégrable sur  $f^{-1}(K)$ , c.à d. si et seulement si  $g$  est intégrable sur  $f^{-1}(K)$ . Ceci est vrai grâce à (4.2). Nous en déduisons que  $h \in L^1_{\text{loc}}(\omega)$ . Nous avons aussi

$$|h|_{L^1(K)} \leq |g|_{L^1(f^{-1}(K))}$$

Soit maintenant  $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ . Par définition

$$\langle f_{\#}(g), \phi \rangle = \langle g, \phi(f) \rangle,$$

d'où

$$\langle f_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\Omega} g(x) \phi(f(x)) dx.$$

Utilisons le théorème intégral de Federer pour la fonction  $g(x)\phi(f(x))|\nabla f(x)|^{-1}$ , qui est  $|\nabla f(x)| dx$  intégrable. Nous obtenons

$$\langle f_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{f^{-1}\{y\}} g(x) \phi(f(x)) d\mu(x) dy$$

d'où

$$\langle f_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\omega} \phi(y) \int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mu(x) dy,$$

$$\langle f_{\#}(g), \phi \rangle = \int_{\omega} h(y) \phi(y) dy,$$

ce qui démontre que  $f_{\#}(g) = h$ . Les propriétés i), ii), iii) avec  $L^1_{loc}$  en découlent.

Soit maintenant  $g \in L^1(\Omega)$ . D'après les résultats précédents, nous avons  $f_{\#}(g) = h$  et le théorème intégral de Federer appliqué à  $g \cdot |\nabla f|^{-1}$  entraîne que  $h \in L^1(\omega)$  et que

$$|h|_{L^1(\omega)} \leq |g|_{L^1(\Omega)} \quad \cdot \quad \blacksquare$$

Proposition 4.2 : Sous les hypothèses (4.2)-(4.4),  $f_{\#}$  a les propriétés suivantes

i) pour  $1 < p < \infty$  et pour  $g \in L^p_{loc}(\Omega)$  (resp.  $L^p(\Omega)$ ), on a

$$\rho^{\frac{1-p}{p}} \cdot f_{\#}(g) \Big|_{\omega'} \in L^p_{loc}(\omega) \quad (\text{resp. } L^p(\omega)),$$

et

$$(4.7) \quad \int_{K \cap \omega'} \rho^{1-p} |f_{\#}(g)|^p dx \leq \int_{f^{-1}(K)} |g|^p dx \quad \text{pour tout compact } K \text{ de } \omega.$$

où  $\rho(y) = \int_{f^{-1}\{y\}} d\mu$  et  $\omega' = \{y \in \omega \text{ t.q. } \rho(y) > 0\}$  ;

ii) il y a égalité dans (4.6) si et seulement si  $g$  est constant sur  $f^{-1}\{y\}$  pour presque tout  $y \in K$ .

Démonstration : Puisque  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ , d'après la proposition 4.1,  $f_{\#}(g) \in L^1_{loc}(\omega)$  avec

$$f_{\#}(g)(y) = \int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mu(x).$$



Appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$(4.8) \quad |f_{\#}(g)(y)| \leq \rho(y)^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_{f^{-1}\{y\}} |g|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

pour  $y \in \omega'$ ,  $\rho(y) \neq 0$  d'où

$$(4.9) \quad \rho(y)^{1-p} |f_{\#}(g)(y)|^p \leq \int_{f^{-1}\{y\}} |g|^p d\mu.$$

Pour un compact  $K$  de  $\omega$  :

$$\int_{K \cap \omega'} \rho^{1-p} |f_{\#}(g)|^p dy \leq \int_K \int_{f^{-1}\{y\}} |g|^p d\mu dy,$$

or, d'après le théorème intégral de Federer, le terme de droite vaut

$$\int_{f^{-1}(K)} |g|^p dx,$$

d'où la propriété i).

Il n'y aura égalité dans (4.7) que si il y a égalité dans (4.8), ce qui donne  $g = \text{cte}$  sur  $f^{-1}\{y\}$ . ■

Proposition 4.3 : Sous les hypothèses (4.2)(4.3), pour tout  $T \in (\mathcal{D}'(\Omega))^n$ , nous avons

$$(4.10) \quad f_{\#}(\text{div } T) = (f_{\#}(T \cdot \nabla f))'.$$

Démonstration : Ce résultat se déduit trivialement des définitions de l'image directe et de la dérivée d'une distribution. La distribution de gauche dans (4.8) prend sur  $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$  la valeur

$$\langle \text{div } T, \phi(f) \rangle$$

ce qui vaut

$$-\langle T, \nabla(\phi(f)) \rangle = -\langle T, \phi'(f) \nabla f \rangle$$

ou encore

$$\langle T \cdot \nabla f, \phi'(f) \rangle ;$$

ce qui donne

$$\langle f_{\#}(T \cdot \nabla f), \phi' \rangle ,$$

d'où finalement

$$\langle (f_{\#}(T \cdot \nabla f))', \phi \rangle . \blacksquare$$

Remarque 4.1 : La relation (4.10) est une généralisation de la relation ci-dessous démontrée par G. VIGFUSSON dans [18] :

$$(4.11) \quad \frac{d}{dy} \int_{f^{-1}\{y\}} g \frac{d\sigma}{|\nabla \psi|} = \int_{f^{-1}\{y\}} \operatorname{div} \left( g \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \right) \frac{d\sigma}{|\nabla \psi|} \quad \text{p.p. } y.$$

Proposition 4.4 : Sous les hypothèses (4.2)(4.3), soit  $\tilde{\Omega}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\xi$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\tilde{\Omega}$  sur  $\Omega$ . Alors, pour tout  $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ,

$$(4.12) \quad \int_{f^{-1}\{y\}} g \frac{d\sigma}{|\nabla f|} = \int_{\tilde{f}^{-1}\{y\}} \tilde{g} |J_\xi| \frac{d\sigma}{|\nabla \tilde{f}|} \quad \text{p.p. } y \in \omega.$$

où  $\tilde{f} = f \circ \xi$ ,  $\tilde{g} = g \circ \xi$ ,  $J_\xi$  est le jacobien de  $\xi$ .

Démonstration : La formule de changement de variable donne, pour  $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  et  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} g(x) \phi(f(x)) dx = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{g}(x') \phi(\tilde{f}(x')) |J_\xi| dx'.$$

Utilisant le théorème intégral de Federer, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y) \int_{f^{-1}\{y\}} g \frac{d\sigma}{|\nabla f|} dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \int_{\tilde{f}^{-1}\{y\}} \tilde{g} \frac{d\sigma}{|\nabla \tilde{f}|} dy.$$

Cette égalité ayant lieu pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ , nous en déduisons (4.11).  $\blacksquare$

# REFERENCES

- [ 1 ] R.A. ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, New-York, 1975.
- [ 2 ] G. BATEMAN, MHD Instabilities, The MIT Press, Cambridge (Massachussetts) 1978.
- [ 3 ] I.B. BERNSTEIN, E.A. FRIEMAN, M.D. KRUSKAL, R.M. KULSRUD, An energy principle for hydromagnetic stability problems, Proc. Royal Soc. A 244, 17-40 (1958).
- [ 4 ] J. DESCLOUX, G. GEYMONAT, Sur le spectre essentiel d'un opérateur relatif à la stabilité d'un plasma en géométrie toroïdale, C.R. Acad. Sc. Paris, A. 290, 795-797 (1980).
- [ 5 ] H. FEDERER, Geometric measure theory, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1969.
- [ 6 ] H. GRAD, Magnetofluid-dynamic spectrum and law shear stability, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 70, 3277-3281 (1973).
- [ 7 ] H. GRAD, P.N. HU, D.C. STEVENS, Adiabatic evolution of plasma equilibrium, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 72, 3789-3793 (1975).
- [ 8 ] R.C. GRIMM, J.M. GREENE, J.L. JOHNSON, in Methods in Computational Physics, J. KILLEEN, ed., 16, 253-280 (New-York : Academic Press, 1976).
- [ 9 ] R. GRUBER, Finite hybrid elements to compute the ideal magnetohydrodynamic spectrum of an axisymmetric plasma, J. of Comp. Phys. 26, 379-389 (1978).
- [ 10 ] C. MERCIER, The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations, Publication of EURATOM CEA, Luxembourg 1974.
- [ 11 ] J. MILNOR, Morse theory, Princeton University Press, 1963.
- [ 12 ] J. MOSSINO, R. TEMAM, Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics (to appear).
- [ 13 ] E. REBHAN, A. SALAT, Axisymmetric MHD stability of sharp-boundary Tokamaks, Nuclear Fusion, 17, 251-260 (1977).
- [ 14 ] C.A. ROGERS, Hausdorff Measures, Cambridge University Press, 1970.
- [ 15 ] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.
- [ 16 ] M. SERMANGE, Etude numérique des bifurcations et de la stabilité des solutions des équations de GRAD-SHAFRANOV, in Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, R. GLOWINSKI, J.L. LIONS ed., North-Holland Publ. Company, INRIA 1980.

- [17] R. TEMAM, A nonlinear eigenvalue problem : the shape of equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal. 60, 51-73 (1975).
- [18] G. VIGFUSSON, The queer differential equations for adiabatic compression of plasma, Bull. Ann. Math. Soc., 1, 778-781 (1979).

**Imprimé en France**  
**par**  
**l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique**